СИМЕТРАЛАТА

ОТ ИЗПИТИТЕ ЗА УЧЕНИЦИ ОТ СЕДМИ КЛАС 2007 – 2019

(18 въпроса/задачи)

По-долу са посочени всички задачи от изпитите през периода 2007 – 2019 г., които са свързани със **симетрала на отсечка.**

Какво е необходимо да знаем?

Определението за симетрала (*ВО 2011 г.*).

Твърденията:

Всяка точка от симетралата на дадена отсечка е на равни разстояния от краищата на тази отсечка. (*2010, 2012, 2016, 2017, 2018, 2019 г.*).

Ако точка е на равни разстояния от краищата на отсечка са от нейната симетрала. (*2014, 2015*).

Симетралата на отсечка е перпендикулярна на отсечката. (*2011, 2016***)**

Трите симетрали на страните на триъгълника се пресичат в една точка. (*2008*).

Ако две точки са от симетралата на отсечка, то те образуват симетралата й. (*1999*).

Трябва да знаем и **записаното в началото на теста**:

Задачите са два вида: с избираем отговор с четири възможности за отговор, от които ***само един е правилният,*** *и с кратък свободен отговор.*

…

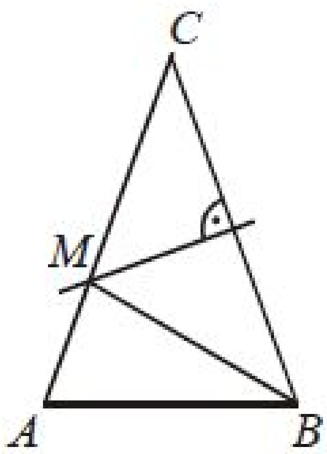
Отговорите отбелязвайте ***със син цвят на химикалката в листа за отговори****, а не върху тестовата книжка.*

…

Чертежите в теста са само за илюстрация. Те не са начертани в мащаб и не са предназначени за директно измерване на дължини и ъгли*.*

(от теста за 2018 г. **–** *вижте в сайта на Министерството на образованието и науката***)**

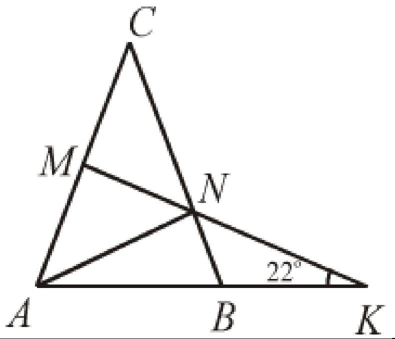
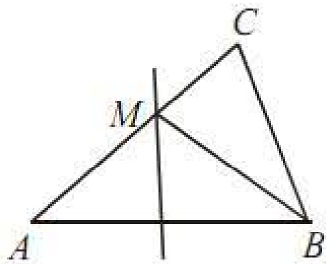
Приятно решаване!

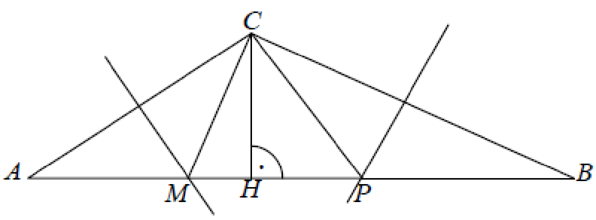
<table>
<tr><th>Година / условие на въпроса/ задачата</th><th>Решение</th></tr>
<tr><td>2010</td><td></td></tr>
<tr><td>1.На чертежа ΔABC е равнобедрен (AC = BC) и симетралата на страната BC пресича AC в точка M.


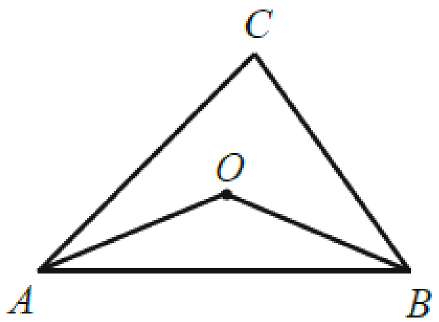
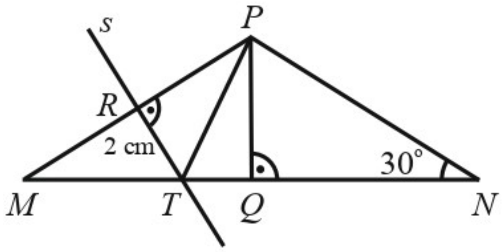
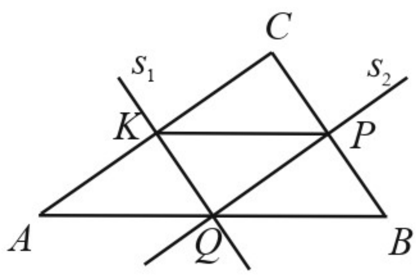
Ако AB = 4 cm и периметърът на ΔABM е 13 cm, то периметърът на ΔABC е:
А) 26 cm Б) 22 cm В) 21 cm Г) 17 cm</td><td>Важно!
$M \in S_{BC} \Longrightarrow MB = MC$

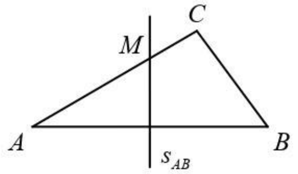
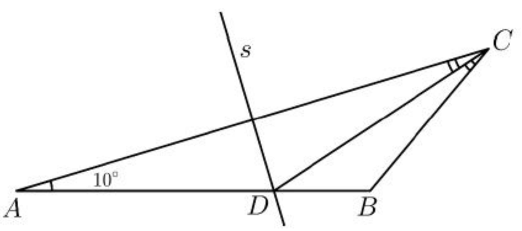
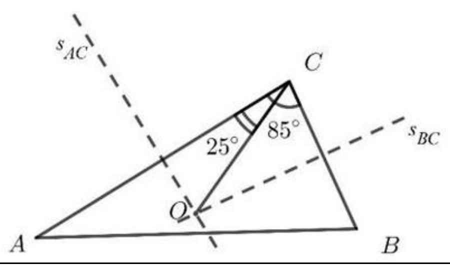
Търсим периметъра на ΔABC
Знаем неговата основа. Трябва да намерим бедрото му.
AM + MB = 9 см, защото обиколката на ΔABM е 13 см. Но AM + MB = AC.
Тогава търсената обиколка е 9 + 9 + 4 = 22.
По кратко е следното решение:
$M \in S_{BC} \Longrightarrow MB = MC = x$

$P_{ABM} = \begin{cases} AM + x + 4 \\ 13 \end{cases} \Longrightarrow AM = 9 - x$
$AC = AM + MC = 9 - x + x = 9 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow P_{ABC} = 9 + 9 + 4 = 22.$
Отговор: Б).</td></tr>
<tr><td>2011</td><td></td></tr>
<tr><td>2. В определението за симетрала на отсечка са пропуснати три думи.
Симетрала на отсечка е (......), която минава през (......) на отсечката и е (.....) на нея.
Думите, които трябва да се напишат на празните места в същия ред, са:
А) права, средата, перпендикулярна
Б) права, средата, успоредна
В) отсечка, края, перпендикулярна
Г) отсечка, края, успоредна</td><td>Започваме с този въпрос, защото той е свързан с определението за симетрала.
Отговорът е ясен:
Симетрала на отсечка е (права), която минава през (средата) на отсечката и е (перпендикулярна) на нея.
Отговор: А).</td></tr>
<tr><td>3. На чертежа ΔABC е равнобедрен (AC = BC) и MK е симетралата на страната AC.
Ако $\sphericalangle AKM = 22°$, мярката на $\sphericalangle MNC$ е равна на:
А) 68° Б) 46° В) 44° Г) 34°</td><td>За да определим $\sphericalangle MNC$ е достатъчно да намерим мярката на $\sphericalangle MCN$ (другият остър ъгъл в правоъгълния ΔMNC).
Важно! $MN \equiv S_{AC} \Longrightarrow \measuredangle NMC = 90°.$
За да пресметнем $\sphericalangle MCN$ е достатъчно да пресметнем ъгъла при основата на равнобедрения ΔABC.
Така в правоъгълния ΔMKA:
$\sphericalangle MAK = 90° - 22° = 68°.$
$\Longrightarrow$ ъгъла при върха C на ΔABC е 180° - (68° + 68°) = 44°.
$\Longrightarrow$ ъгъла при върха C на ΔABC е 180° - (68° + 68°) = 44°$\Longrightarrow$ другият остър ъгъл в правоъгълния ΔMNC е търсеният и той е 46°.Отговор: Б).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>2012</td><td></td></tr>
<tr><td>4. В ΔABC симетралата на AB пресича страната AC в точка M. Ако $AC = 10\ cm$ и $BC = 8\ cm$, периметърът на ΔBMC е:


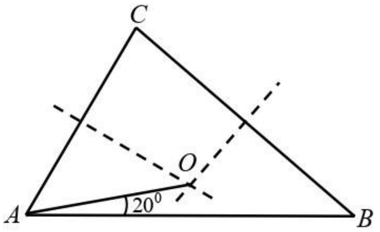
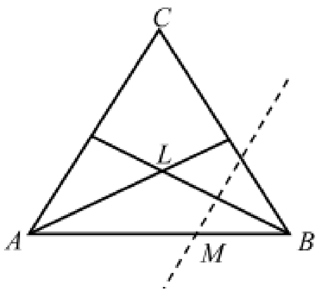
А) 10 cm Б) 13 cm В) 18 cm Г) 21 cm</td><td>Важно!
$M \in S_{AB} \Longrightarrow MA = MB = x$
$\Longrightarrow MC = AC - MA = 10 - x$
$P_{BMC} = MC + MB + BC =$
$= 10 - x + x + 8 = 18.$
Отговор: В).</td></tr>
<tr><td>5. За $\Delta\ ABC$ на чертежа точката M е от симетралата на страната AC , точката P е от симетралата на страната BC и CH ($H \in AB$) е височината към страната AB .
Ако периметърът на ΔMPC е 32 cm и $CH = 6\ cm$, лицето на ΔABC е равно на:
А) 48 cm^2 Б) 96 cm^2 В) 192 cm^2 Г) 384 cm^2

</td><td>Търсим лицето на ΔABC.
От формулата за лице на триъгълник се досещаме, че ни трябва страна и височина към нея.
Дадена е височината CH. Търсим страната AB.
Важно!
$M \in S_{AC} \Longrightarrow MA = MC$
$P \in S_{BC} \Longrightarrow PB = PC$
$\Longrightarrow$
$AB = AM + MP + PB =$
$= MC + MP + PC = P_{MPC} = 32.$
$\Longrightarrow$
$S_{ABC} = \frac{CH.AB}{2} = \frac{6.32}{2} = 96.$
Отговор: Б).</td></tr>
<tr><td>2014</td><td></td></tr>
<tr><td>6. На чертежа ΔABC е разностранен.
Ако $AO = OB$, то точка O лежи на:
А) ъглополовящата на $\measuredangle ACB$
Б) симетралата на страната AB
В) височината през C към AB
Г) медианата през C към AB</td><td>$AO = OB \Longrightarrow O \in S_{AB}$
Веднага следва отговор:
„Б) симетралата на страната AB”, защото
в тестовата книжка е записано:</td></tr>
</table>

 	*„Задачите са два вида: с избираем отговор с* четири възможности за отговор, от които **само един е правилният**, *и с кратък свободен отговор."* **Коментар**: Даденото в условието на въпроса, че триъгълникът е ***разностранен*** прави останалите отговори неверни. **Отговор: Б).**
2015	
7(в теста под номер **16.**) На чертежа ΔMNP е равнобедрен, $MP = NP$. Правата s е симетралата на MP и $TR = 2\ cm$. Дължината на отсечката MN в сантиметри е: А) 6 Б) 8 В) 12 Г) 16  	За да отговорят на този въпрос учениците трябваше да забележат, че в **текста липсва нещо, което има на чертежа „30°",** въпреки че текста е водещ, а чертежите в теста са само за илюстрация. До въпрос **16.** учениците трябваше да преминат през два геометрични въпроса (**14.** и **15.**, отделно точкувани), които водят към отговора на този въпрос. **14.** Височината на ΔMTP през върха P е отсечката: А) MQ Б) PQ В) TR Г) PR **15.** Кои твърдения са верни? (I) $\Delta MRT \cong \Delta PQT$ (II) $\Delta MQP \cong \Delta NQP$ (III) $\Delta PTR \cong \Delta MTR$ А) Само (III) и (II) Б) Само (I) и (II) В) Само (I) и (III) Г) И трите – (I), (II) и (III) **Отговор: В).**
2016	
8. На чертежа s_1 и s_2 са симетралите съответно на страните AC и BC в ΔABC. Ако $AB + KP = 24\ cm$, дължината на CQ е: А) 12 cm Б) 8 cm В) 6 cm Г) 4 cm  	$Q \in S_{AC} \Longrightarrow QA = QC = x$ $Q \in S_{BC} \Longrightarrow QB = QC = x$ Знаем, че ако симетралите на две от страните на триъгълник се пресичат върху третата страна, триъгълникът е правоъгълен с хипотенуза – третата страна. Тогава четириъгълника $KQPC$ е правоъгълник и от свойствата на правоъгълника знаем, че диагоналите са равни ($KP = QC = x$). $AB + KP = 24 \Longrightarrow$ $2x + x = 24 \Longrightarrow 3x = 24 \Longrightarrow x = 8.$ **Отговор: Б).**
2017	
9. В ΔABC страната $AC = 5\ cm$ и страната $BC = 4\ cm$. Симетралата на страната AB пресича страната AC в точка M.	Важно! $M \in S_{AB} \Longrightarrow MA = MB = x$ $\Longrightarrow MC = AC - MA = 5 - x$

 Периметърът на ΔBCM е равен на: А) 5 *cm* Б) 8 *cm* В) 9 *cm* Г) 10 *cm*	$P_{BMC} = MC + MB + BC =$ $= 5 - x + x + 4 = 9.$ **Отговор: В).**
2018	
10. На чертежа е даден ΔABC. Ъглополовящата на $\measuredangle ACB$ и симетралата на страната AC се пресичат в точка D ($D \in AB$). Ако $\measuredangle BAC = 10°$ то мярката на $\measuredangle ABC$ е: А) 90° Б) 120° В) 150° Г)160° 	Търсим $\measuredangle ABC$. Знаем $\measuredangle BAC = 10°$. Необходимо е да изчислим $\measuredangle ACB$. $D \in S_{AC} \Longrightarrow DA = DC$ $\Longrightarrow$ ΔADC е равнобедрен и $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD = 10°$. Но CD е ъглополовяща $\Longrightarrow \measuredangle ACB = 20°$. Окончателно $\measuredangle ABC = 180° - (10° + 20°) = 150°$. **Отговор: В).**
2019	
11. На чертежа симетралите на страните AC и BC в ΔABC се пресичат в точка O. Ако $\measuredangle ACB = 85°$, $\measuredangle ACO = 25°$ и $BC = 6$ *cm*, дължината на AO е: А) 3 *cm* Б) 4,5 *cm* В) 6 *cm* Г) 12 *cm* 	$O \in S_{AC} \Longrightarrow OA = OC$ $O \in S_{BC} \Longrightarrow OB = OC$ Търсим AO. Достатъчно е да намерим OC. Разглеждаме ΔBOC, който е равнобедрен ($OB = OC$) с $\measuredangle OCB = 85° - 25° = 60°$. Следователно е равностранен. Тогава OC, а следователно и AO, е 6 *cm*. **Отговор: В).**

Допълнение – задачи от изпитите през 2007 и 2008 г.

Година 2008	
12. На чертежа симетралите на страните AC и BC на ΔABC се пресичат в точка O. Ако $\measuredangle BAO = 20°$, то $\measuredangle ACB$ е равен на:	$O \in S_{AC} \Longrightarrow OA = OC$ $O \in S_{BC} \Longrightarrow OB = OC$

А) 70 ° Б) 140 ° В) 40 ° Г) 60° 	$\begin{cases} O \in S_{AC} \Rightarrow OA = OC \\ O \in S_{BC} \Rightarrow OB = OC \end{cases} \Rightarrow OA = OB$ Нека $\measuredangle CAO = x \Rightarrow \measuredangle ACO = x$ $\measuredangle\, OCB = y \Rightarrow \measuredangle OBC = y$ $\measuredangle\, OAB = 20° \Rightarrow \measuredangle OBA = 20°.$ Ъглите на $\Delta\, ABC$ са $x + 20°, y + 20°$ и търсеният $x +\ y.$ $x + 20° + y + 20° + x +\ y = 180°$ $\Rightarrow x +\ y = 70°.$ **Отговор: А).**
Година 2007	
13. В равностранен ΔABC с дължина на страната 45 *cm* пресечната точка на ъглополовящите на ъглите при върховете *A* и *B* е означена с *L*. Ако симетралата на отсечката *BL* пресича страната *AB* в точка *M*, да се намери дължината в сантиметри на отсечката *AM*. 	$M \in S_{LB} \Rightarrow MB = ML$ Нека $MB = x \Rightarrow ML = x.$ Не е трудно да се установи, че $\Delta\, AML$ е правоъгълен с хипотенуза *AM* и катет *ML* срещу ъгъл от 30° $\Rightarrow MA = 2x.$ $AB = \begin{cases} 45 \\ 2x + x \end{cases} \Rightarrow 3x = 45$ $\Rightarrow x = 15 \Rightarrow 2x = 30$ $\Rightarrow MA = 2x = 30\ cm.$
14.*ABCD* е ромб и симетралата на страната *BC* пресича диагонала *AC* в точка *M*. Ако *AM* = *AB*, то $\measuredangle BAD$ е равен на: А) 30° Б) 72° В) 60° Г) 75°	От свойствата на ромба следва, че . $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB = \alpha$. $M \in s_{BC} \Rightarrow$ $MC = MB, \measuredangle BCM = \measuredangle CBM = \alpha$ $\Rightarrow \measuredangle BCM = \measuredangle CBM = \alpha$ $\measuredangle ABM = 2\alpha = \measuredangle AMB.$ $\Rightarrow 5\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$ $\Rightarrow \measuredangle BAD = 72°.$ **Отговор: Б).**

През 2015 г. учениците решаваха следната геометрична задачи.

15. Даден е равнобедрен $\Delta\, MNP$, $MP = NP$. Върху ъглополовящата ML ($L \in NP$) на $\measuredangle NMP$ е избрана такава точка K, че $\measuredangle MNK = \alpha$ и $\measuredangle PNK = 3\alpha$.

Изразете чрез α ъглите на ΔNKL . **Симетралата на отсечката *NK* пресича страната *MN*** в точка *T*. Намерете стойността на α , за която $\Delta MTL \cong \Delta MPL$ и пресметнете мярката на $\measuredangle TKM$ при тази стойност на α.

Решението

Стъпките, които следваме, за да решим задача:

1. Къде да поставим точката *K*. Да, тя е точка от *ML*, но къде точно. Нали трябва да направим точен чертеж?
2. Чертаем с молив, за да изтрием работния вариант в който произволно сме поставили точката *K*, за да направим правдоподобен чертеж.
3. Нека направим няколко предварителни пресмятания с данните от условието.

Първо отбелязваме, че триъгълника е равнобедрен – нека ъглите при основата са $2x$ градуса.

Тогава ъглополовящата *ML* ще раздели ъгъла при върха *M* на две равни части – всяка от *x* градуса.

4. Два отдадените ъгли „$\measuredangle MNK = \alpha$ и $\measuredangle PNK = 3\alpha$." Тогава $4\alpha = 2x \Longrightarrow x = 2\alpha$.
5. Два от ъглите на $\Delta\, MNK$ са 2α и α. Тогава $\measuredangle\, NKL = 3\alpha$.
6. Охо, триъгълник *KNL* се оказа равнобедрен, защото два от ъглите са по 3α. Оказа се също, че $LK = LN$. Тук вече можем да конкретизираме положението на точката *K*: $LK = LN$.
7. Вече не е проблем да изразим чрез α ъглите на $\Delta\, NKL$.
8. Тук много важно е да ползваме , че $\boldsymbol{LK = LN \Longrightarrow L \in s_{KN}} \Longrightarrow LT$ е ъглополовяща на $\measuredangle\, MNL \Longrightarrow \measuredangle\, MLT = \measuredangle TLN = 90^0 - 3\alpha$.
9. От посочената в условието на задачата еднаквост „$\Delta MTL \cong \Delta MPL$"$\Longrightarrow$

$$\measuredangle\, MLT = \measuredangle MLP = 90^0 - 3\alpha.$$

10. Сега от сбора на ъглите $\measuredangle\, MLT + \measuredangle MLP + \measuredangle TLN = \begin{cases} 3.(90^0 - 3\alpha) \\ 180^0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 10^0$.
11. $\boldsymbol{T \in s_{KN} \Longrightarrow TK = TN} \Longrightarrow \measuredangle\, TKN = \alpha \Longrightarrow \measuredangle\, TKN = 4\alpha = 40^0 \Longrightarrow \measuredangle TKM = 180^0 - 40^0 = 140^0$.

Задача за самостоятелна работа от изпитите през 1998, 1999 и 2000 г.

През **1998 г.** третата задача от изпита бе следната**:**

16. Даден е остроъгълен $\Delta\, ABC$, в който $AC > BC$. Симетралата на *AB* пресича *AC* в точка *M*.

а) Ако $BM \perp AC$ и $2MC = BC$, да се намерят ъглите на ΔABC.

б) Ако точките P и Q са среди съответно на AM и BC и $2PQ = BC$, да се намери $\measuredangle BAC$.

Отговори:

а) $\measuredangle BAC = 45°$, $\measuredangle ABC = 75°$, $\measuredangle BCA = 60°$.

б) $\measuredangle BAC = 60°$.

През **1999 г.** учениците решаваха две геометрични задачи (от общо 4).

Ето една от тях е:

17. Даден е правоъгълен $\Delta\, ABC$, в който ъгъл $\measuredangle C = 90°$ и CD ($D \in AB$) е височина. Върху AB е взета точка M , така че $AM = AC$.

Ъглополовящата на $\measuredangle\, BAC$ пресича височината CD в точката O. Ако $\measuredangle ABC = 30\,°$ да се докаже, че правата OM е симетрала на отсечката AC.

Много шум в медиите предизвика задачата от 2000 г.:

18. Върху страната AB на триъгълника ABC е взета точка B такава, че $BM = 2AM$ и

$\measuredangle AMC = 120°$. Симетралата на страната BC пресича CM в точка P, така че $BM = 2PM$.

а) Да се намерят ъглите ABP и ACB.

б) Перпендикулярът, издигнат от B към CB пресича правата CM в точката K. Ако CB = 2 cm, да се намери лицето на четириъгълника $AKBC$.

Ще цитирам само казаното в медиите тогава от големия български математик *проф. Николай Хаджииванов*, според който е трябвало да бъде написано ***CM*** **права ли е или е отсечка.**

Ако все пак искате да решите задачата - допълваме, че ***CM*** **е отсечка.**

Ето и отговорите на задачата:

а) $\measuredangle ABP = 30°$, $\measuredangle ACB = 60°$.

б) $3\ cm^2$.